

5 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 150 минут)

► **5-1.** Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.

► **5-2.** В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье куда налили? Ответ обоснуйте.

► **5-3.** Петя и Вася сделали флаг. Петя достал прямоугольный кусок белой ткани, а Вася нашил на него две серые ленты так, как показано на рисунке. Размеры вертикальной полосы 50 см × 10 см, а горизонтальной полосы — 8 см × 80 см. Чему равна площадь белой части флага?



► **5-4.** Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пульек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

► **5-5.** Из четырех внешне одинаковых монет три — настоящие и весят одинаково, а четвертая — фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

5 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 150 минут)

► **5-1.** Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.

► **5-2.** В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье куда налили? Ответ обоснуйте.

► **5-3.** Петя и Вася сделали флаг. Петя достал прямоугольный кусок белой ткани, а Вася нашил на него две серые ленты так, как показано на рисунке. Размеры вертикальной полосы 50 см × 10 см, а горизонтальной полосы — 8 см × 80 см. Чему равна площадь белой части флага?



► **5-4.** Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пульек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

► **5-5.** Из четырех внешне одинаковых монет три — настоящие и весят одинаково, а четвертая — фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

6 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 150 минут)

► **6-1.** Пуд соли стоит на 100 рублей меньше, чем ложка дёгтя. А три пуда соли стоят на 100 рублей больше, чем две ложки дёгтя. Сколько стоит ложка дёгтя?

► **6-2.** В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье куда налили? Ответ обоснуйте.

► **6-3.** Рапунцель равномерно растёт со скоростью 2 см/год, а её волосы со скоростью 7 см/год, и с такой же скоростью, т.е. 7 см/год, растёт Алиса. Волосы Рапунцель достигли пола, когда она была одного роста с Алисой. На сколько сантиметров выросла Алиса с тех пор, как волосы Рапунцель были в 40 сантиметрах от пола?

► **6-4.** Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пульек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

► **6-5.** Из четырех внешне одинаковых монет три – настоящие и весят одинаково, а четвертая – фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

6 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 150 минут)

► **6-1.** Пуд соли стоит на 100 рублей меньше, чем ложка дёгтя. А три пуда соли стоят на 100 рублей больше, чем две ложки дёгтя. Сколько стоит ложка дёгтя?

► **6-2.** В три банки с надписями «малиновое», «клубничное» и «малиновое или клубничное» налили смородиновое, малиновое и клубничное варенье. Все надписи оказались неправильными. Какое варенье куда налили? Ответ обоснуйте.

► **6-3.** Рапунцель равномерно растёт со скоростью 2 см/год, а её волосы со скоростью 7 см/год, и с такой же скоростью, т.е. 7 см/год, растёт Алиса. Волосы Рапунцель достигли пола, когда она была одного роста с Алисой. На сколько сантиметров выросла Алиса с тех пор, как волосы Рапунцель были в 40 сантиметрах от пола?

► **6-4.** Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пульек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

► **6-5.** Из четырех внешне одинаковых монет три – настоящие и весят одинаково, а четвертая – фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

7 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **7-1.** Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму (приведите все возможные варианты и докажите, что других нет).

► **7-2.** Вдоль прямой аллеи растут пять дубов А, Б, В, Г, Д (расстояния между дубами не обязательно одинаковы, дубы именно в таком порядке), расстояние между А и Д — 28 м. Точно посередине между А и Б Кролик посадил морковку. В середине Б и В Винни-Пух посадил розу. В середине между В и Г Пятачок закопал жёлудь. В середине между Г и Д Иа-Иа посадил чертополох. Расстояние между морковкой и чертополохом равно 20 м. Чему равно расстояние между розой и жёлудем?

► **7-3.** На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

► **7-4.** Из четырех внешне одинаковых монет три — настоящие и весят одинаково, а четвертая — фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

► **7-5.** Дети, построенные парами, вышли из парка, где они собирали листья для гербария. В каждой паре идут мальчик и девочка, при этом у мальчика либо ровно в два раза больше листьев, чем у девочки, либо впятеро меньше. Может ли оказаться так, что в сумме у всех детей ровно 2015 листьев?

7 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **7-1.** Произведение двух натуральных чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите их сумму (приведите все возможные варианты и докажите, что других нет).

► **7-2.** Вдоль прямой аллеи растут пять дубов А, Б, В, Г, Д (расстояния между дубами не обязательно одинаковы, дубы именно в таком порядке), расстояние между А и Д — 28 м. Точно посередине между А и Б Кролик посадил морковку. В середине Б и В Винни-Пух посадил розу. В середине между В и Г Пятачок закопал жёлудь. В середине между Г и Д Иа-Иа посадил чертополох. Расстояние между морковкой и чертополохом равно 20 м. Чему равно расстояние между розой и жёлудем?

► **7-3.** На острове 1000 деревень, в каждой из которых 99 жителей. Каждый житель острова — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. При этом известно, что на острове ровно 54054 рыцаря. В один прекрасный день каждому жителю острова был задан вопрос: «Кого в Вашей деревне больше: рыцарей или лжецов?» Оказалось, что в каждой деревне на этот вопрос 66 человек ответило, что в деревне больше рыцарей, и 33 — что больше лжецов. Сколько на острове деревень, в которых рыцарей больше, чем лжецов?

► **7-4.** Из четырех внешне одинаковых монет три — настоящие и весят одинаково, а четвертая — фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

► **7-5.** Дети, построенные парами, вышли из парка, где они собирали листья для гербария. В каждой паре идут мальчик и девочка, при этом у мальчика либо ровно в два раза больше листьев, чем у девочки, либо в пять раз меньше. Может ли оказаться так, что в сумме у всех детей ровно 2015 листьев?

8 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **8-1.** Сейчас к классу 21 человек, из них 5 девочек. Какое наименьшее число девочек надо добавить в класс (мальчики не добавляются), чтобы доля девочек в нем стала больше $1/3$?

► **8-2.** Написали два числа – первое и второе. К первому прибавили второе – получили третье, ко второму прибавили третье – получили четвертое и т.д. Сумма первых шести чисел равна 2015. Чему равно пятое число?

► **8-3.** Из четырех внешне одинаковых монет три – настоящие и весят одинаково, а четвертая – фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

► **8-4.** В треугольнике ABC $AC = 1$, $AB = 2$, O – точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC , пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM .

► **8-5.** Дети, построенные парами, вышли из парка, где они собирали листья для гербария. В каждой паре идут мальчик и девочка, при этом у мальчика либо ровно в два раза больше листьев, чем у девочки, либо впятеро меньше. Может ли оказаться так, что в сумме у всех детей ровно 2015 листьев?

8 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **8-1.** Сейчас к классу 21 человек, из них 5 девочек. Какое наименьшее число девочек надо добавить в класс (мальчики не добавляются), чтобы доля девочек в нем стала больше $\frac{1}{3}$?

► **8-2.** Написали два числа – первое и второе. К первому прибавили второе – получили третье, ко второму прибавили третье – получили четвертое и т.д. Сумма первых шести чисел равна 2015. Чему равно пятое число?

► **8-3.** Из четырех внешне одинаковых монет три – настоящие и весят одинаково, а четвертая – фальшивая, и её вес отличается от веса настоящей. Имеются весы, на которых можно определить точный вес двух или большего числа монет. Точный вес одной монеты определить нельзя. Как за 4 взвешивания найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее, чем настоящие?

► **8-4.** В треугольнике ABC $AC = 1$, $AB = 2$, O – точка пересечения биссектрис. Отрезок, проходящий через точку O параллельно стороне BC , пересекает стороны AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите периметр треугольника AKM .

► **8-5.** Дети, построенные парами, вышли из парка, где они собирали листья для гербария. В каждой паре идут мальчик и девочка, при этом у мальчика либо ровно в два раза больше листьев, чем у девочки, либо впятеро меньше. Может ли оказаться так, что в сумме у всех детей ровно 2015 листьев?

9 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **9-1.** Сейчас к классу 21 человек, из них 5 девочек. Какое наименьшее число девочек надо добавить в класс (мальчики не добавляются), чтобы доля девочек в нем стала больше $1/3$?

► **9-2.** К углам прямоугольного бассейна периметром 200 м подошли 4 ученика. Тренер подплыл куда-то к бортику бассейна и пригласил учеников подойти. Все пошли кратчайшими путями. Ваня прошел 30 м, Максим – 60 м, Маша – 40 м. Сколько метров пришлось пройти четвертому ученику?

► **9-3.** Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?

► **9-4.** Прямая l проходит через середину стороны AC треугольника ABC перпендикулярно биссектрисе его угла B и пересекает прямые BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что $AD = CE$.

► **9-5.** В волейбольном турнире (ничьих не бывает), состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше одного раза). Команда “Лузер” после пятого тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд и больше, чем все остальные). Могла ли она по окончании турнира занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды)?

9 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

► **9-1.** Сейчас к классу 21 человек, из них 5 девочек. Какое наименьшее число девочек надо добавить в класс (мальчики не добавляются), чтобы доля девочек в нем стала больше $1/3$?

► **9-2.** К углам прямоугольного бассейна периметром 200 м подошли 4 ученика. Тренер подплыл куда-то к бортику бассейна и пригласил учеников подойти. Все пошли кратчайшими путями. Ваня прошел 30 м, Максим – 60 м, Маша – 40 м. Сколько метров пришлось пройти четвертому ученику?

► **9-3.** Среднее арифметическое нескольких подряд идущих натуральных чисел больше, чем самое маленькое из них, в 5 раз. Во сколько раз среднее арифметическое меньше, чем наибольшее из этих чисел?

► **9-4.** Прямая l проходит через середину стороны AC треугольника ABC перпендикулярно биссектрисе его угла B и пересекает прямые BA и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что $AD = CE$.

► **9-5.** В волейбольном турнире (ничьих не бывает), состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше одного раза). Команда “Лузер” после пятого тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд и больше, чем все остальные). Могла ли она по окончании турнира занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды)?

10 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

- **10-1.** Известно, что число 3 является решением уравнения

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 = 0.$$

Чему может быть равно $2a + 3b$?

- **10-2.** Числа a , b , c отличны от нуля и выполняются равенства

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

Найдите $ab + bc + ca$.

► **10-3.** Строки квадратной таблицы размером 2015×2015 занумеровали различными целыми числами (не обязательно идущими подряд). Теми же числами занумеровали ее столбцы, возможно, в другом порядке. После этого в каждой клетке таблицы записали сумму номеров ее строки и столбца. Докажите, что четных чисел в клетках таблицы записано больше, чем нечетных.

► **10-4.** Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

► **10-5.** В волейбольном турнире (ничьих не бывает), состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше одного раза). Команда “Лузер” после пятого тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд и больше, чем все остальные). Могла ли она по окончании турнира занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды)?

10 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

- **10-1.** Известно, что число 3 является решением уравнения

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 = 0.$$

Чему может быть равно $2a + 3b$?

- **10-2.** Числа a , b , c отличны от нуля и выполняются равенства

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

Найдите $ab + bc + ca$.

► **10-3.** Строки квадратной таблицы размером 2015×2015 занумеровали различными целыми числами (не обязательно идущими подряд). Теми же числами занумеровали ее столбцы, возможно, в другом порядке. После этого в каждой клетке таблицы записали сумму номеров ее строки и столбца. Докажите, что четных чисел в клетках таблицы записано больше, чем нечетных.

► **10-4.** Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.

► **10-5.** В волейбольном турнире (ничьих не бывает), состоящем из 9 туров, приняли участие 10 команд. В каждом туре команды некоторым образом разбивались на 5 пар и команды из одной пары играли между собой (при этом никакие две команды не играли друг с другом больше одного раза). Команда “Лузер” после пятого тура занимала чистое второе место (т. е. имела меньше побед, чем одна из команд и больше, чем все остальные). Могла ли она по окончании турнира занять чистое последнее место (т. е. иметь меньше побед, чем все остальные команды)?

11 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

- **11-1.** Известно, что число 4 является решением уравнения

$$(x - a)^4 + (x + b)^4 = 0.$$

Чему может быть равно $a + 3b$?

- **11-2.** Числа a , b , c отличны от нуля и выполняются равенства

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

Найдите $ab + bc + ca$.

- **11-3.** У Саши есть 24 гирьки весами 1 г, 2 г, ..., 24 г. На какое наибольшее число кучек равного веса Саша их может разложить? Количество гирек в кучках могут быть различными.

- **11-4.** Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника ABH , пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = 5$.

- **11-5.** В каждом из 2015 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по ходу часовой стрелки на число полей, написанное там, где она была, а затем увеличивают на единицу число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.

11 класс

(все задачи оцениваются исходя из 7-ми баллов, время на решение — 180 минут)

- **11-1.** Известно, что число 4 является решением уравнения

$$(x - a)^4 + (x + b)^4 = 0.$$

Чему может быть равно $a + 3b$?

- **11-2.** Числа a , b , c отличны от нуля и выполняются равенства

$$a + \frac{b}{c} = b + \frac{c}{a} = c + \frac{a}{b} = 1.$$

Найдите $ab + bc + ca$.

- **11-3.** У Саши есть 24 гирьки весами 1 г, 2 г, ..., 24 г. На какое наибольшее число кучек равного веса Саша их может разложить? Количество гирек в кучках могут быть различными.

- **11-4.** Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Окружность, описанная около треугольника ABH , пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG , если $DE = 5$.

- **11-5.** В каждом из 2015 полей, расположенных по кругу, записано натуральное число. На одно из полей ставится фишка. Ход состоит в том, что фишку сдвигают по ходу часовой стрелки на число полей, написанное там, где она была, а затем увеличивают на единицу число там, куда она пришла. Докажите, что через некоторое время фишка побывает на всех полях.